

# Die Energieverteilung der $\alpha$ -Teilchen bei der Kernverdampfung unter Berücksichtigung der Spaltung I

Von G. SÜSSMANN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **8a**, 404—416 [1953]; eingegangen am 23. März 1953)

Es wird versucht, das häufige Auftreten „zu langsamer“  $\alpha$ -Teilchen in den Photoplatten-Sternen als kinematischen Effekt zu deuten: ein wesentlicher Teil der hochangeregten Kerne zerfällt in zwei etwa gleich große Bestandteile, und die Geschwindigkeit, mit der die beiden Bruchstücke auseinanderfliegen, ist gerade so groß, daß das Energiespektrum der  $\alpha$ -Spuren stark verzerrt wird, das der p-Spuren dagegen nur unbedeutend. Dazu wird unter Zugrundelegung des „Gaströpfchenmodells“ die Zeitskala der Spaltung abgeschätzt und mit der der Verdampfung verglichen.

Die von Blau und Wambacher<sup>1</sup> im Jahre 1937 in photographischen Platten gefundenen Bündel strahlenförmig von einem Punkt ausgehender Ionisationsspuren finden bekanntlich folgende Deutung: Ein solcher „Stern“ entsteht dadurch, daß ein kosmisches Teilchen sehr hoher Energie durch einen Atomkern dringt, dabei eine Nukleonenkaskade hoher Energie hervorruft und außerdem auf den ganzen Kern eine sehr hohe Anregungsenergie überträgt, die dieser dann durch successive Emission von Nukleonen,  $\alpha$ -Teilchen, Deuteronen und anderen leichten Atomkernen (und schließlich auch Elektronen beiderlei Vorzeichens und Photonen) wieder verliert. Mit dem letzteren, als „Kernverdampfung“ bezeichneten Vorgang befaßt sich diese Arbeit. Da sich das thermische Gleichgewicht verhältnismäßig rasch<sup>2</sup> einstellt, und da die Kaskaden-Partikel mit ihren helleren Spuren auch experimentell leicht von den verdampften zu unterscheiden sind, kann die Kaskade ganz außer Betracht bleiben. Die quantitative Theorie der Kernverdampfung<sup>3</sup> nun ist der Thermodynamik des Richardson-Effektes der Metallelektronen genau nachgebildet, abgesehen von der einen Komplikation<sup>4</sup>, daß die Verdampfung eines jeden Teilchens

den thermodynamischen Zustand des emittierenden Körpers nicht unerheblich ändert. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist im allgemeinen befriedigend<sup>5</sup>. Man wird, da es sich um eine gewöhnliche Thermodynamik von größenordnungsmäßig hundert Teilchen handelt, eine höhere als etwa 10-proz. Genauigkeit nicht erwarten können. Hinzu kommt, daß die statistische Ungenauigkeit des experimentellen Materials<sup>6</sup> ebenfalls noch recht groß ist. Deutlich außerhalb der Fehlergrenzen liegt vorläufig nur ein Effekt<sup>7</sup>, und dessen Aufklärung ist das Hauptziel dieser Arbeit. Es wird nämlich eine beträchtliche Anzahl von verdampften  $\alpha$ -Teilchen beobachtet, deren Energien z. Tl. weit unterhalb des Schwellenwertes liegen; d. h., sie haben Energien, die bedeutend niedriger sind als die Höhe des Coulomb-Walles, den sie beim Verlassen des Ursprungskernes zu überwinden haben. Bei den Protonen ist diese Diskrepanz wohl auch vorhanden, doch lange nicht in solch auffälligem Maße. Entsprechende Statistiken über die anderen, selteneren Kerne liegen noch nicht vor. Eine Reihe von Versuchen, das Auftreten dieser „zu langsamen“ Teilchen plausibel zu machen, soll im folgenden besprochen werden. Den anschließenden Rechnungen wird der Deutungsvor-

<sup>1</sup> M. Blau u. H. Wambacher, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl., Abt. IIa **146**, 469, 623 [1937].

<sup>2</sup> Nach S. Tomonaga, Z. Physik **110**, 573 [1938], beträgt diese Zeitdauer etwa  $10^{-22}$  sec, hat also dieselbe Größenordnung wie die Dauer  $R/c = 0,3 \cdot 10^{-22}$  sec der Kaskadenbildung. Die Zeitkonstante der nachfolgenden Verdampfung beträgt dagegen  $10^{-22}$  bis  $10^{-18}$  sec, und die der  $\gamma$ - und  $\beta$ -Emission ist um weitere Zehnerpotenzen größer.

<sup>3</sup> V. F. Weisskopf, Physic. Rev. **52**, 295 [1937].

<sup>4</sup> E. Bagge, Ann. Physik **39**, 535 [1941].

<sup>5</sup> K. J. Le Couteur, Proc. physic. Soc., Sect. A **63**, 259 [1950].

<sup>6</sup> J. B. Harding, S. Lattimore u. D. H. Perkins, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **196**, 325 [1949]; D. H. Perkins, Philos. Mag. **40**, 601 [1949]; **41**, 138 [1950]; Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **203**, 399 [1950]; N. Page, Proc. physic. Soc., Sect. A **63**, 250 [1950]; u. a.

<sup>7</sup> S. O. C. Sørensen, Philos. Mag. **42**, 188 [1951]; P. R. Hodgson, Philos. Mag. **43**, 934 [1942].



schlag von W. Heisenberg<sup>8</sup> zugrunde gelegt, der besagt, daß ein Teil der stark erhitzten Kerne in zwei etwa gleich große Teile spalten wird, und daß für deren Verdampfungsprodukte z. Tl. eine geringe Laboratoriumsgeschwindigkeit resultieren kann. Zunächst jedoch soll eine kurze Übersicht über die statistische Theorie des Verdampfungsaktes gegeben und mit den Beobachtungen verglichen werden<sup>9</sup>. Die wichtigsten für die Verdampfung in Frage kommenden Kerne sind die mittelschweren Br<sup>80</sup> und Ag<sup>107</sup> oder Ag<sup>109</sup> sowie die leichten C<sup>12</sup>, N<sup>14</sup> und O<sup>16</sup>. Auf die letzteren kann die Thermodynamik ihrer geringen Nukleonenzahlen wegen leider nicht mehr angewandt werden; wir lassen sie außer Betracht.

### 1. Das Energiespektrum des Verdampfungsprozesses

Wir fragen zunächst nach den relativen Häufigkeiten der bei dem Verdampfungsprozeß der Art<sup>10</sup>



frei werdenden Energien. Für die Wahrscheinlichkeit  $n_\varepsilon d\varepsilon dt$  dafür, daß der angeregte  $Z^A$ -Kern in der Zeit  $dt$  ein  $z^a$ -Teilchen mit einer Energie zwischen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon + d\varepsilon$  emittiert und dabei in einen  $Z'^{A'}$ -Kern übergeht, gilt nach dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts<sup>11</sup>

<sup>8</sup> Unveröffentlicht.

<sup>9</sup> Die Darstellung lehnt sich in vielem an die des Artikels von R. Hagedorn u. W. Macke in „W. Heisenberg, Die kosmische Strahlung“, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1953) an.

<sup>10</sup>  $Z$  steht für das Elementesymbol und  $Z$  für die Kernladungszahl; so ist z. B. im Falle des Silberkerns  $Z = \text{Ag}$  und  $Z = 47$ . Entsprechend ist z. B.  $z = \text{H}$  gleichbedeutend mit  $z = 1$ ; ( $p \equiv \text{H}^1$ ,  $d \equiv \text{H}^2$ ,  $t \equiv \text{H}^3$ ;  $\alpha \equiv \text{He}^4$ ).

$$n' dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dU \vartheta(U) \left| \int_0^t dt' \cdot e^{-i[U - (U' + u + \varepsilon)] \cdot t'} \right|^2 \cdot |(Z' + z | H_1 | Z)|^2 = 2\pi dt \vartheta \cdot |(Z' + z | H_1 | Z)|^2$$

mit (5). Entsprechend ist

$$n_\varepsilon d\varepsilon dt = 2\pi dt \vartheta' \cdot |(Z | H_1 | Z' + z)|^2 (2j + 1) 4\pi p^2 dp V/h^3.$$

Daraus folgt bereits (2), da  $\varepsilon = p^2/2m$  ist und  $n' = \sigma' p/mV$  im Normierungsvolumen  $V$ . Der Rückstoß ist hierbei unberücksichtigt gelassen ( $E = 0$ ). Außerdem haben wir „revers“ (= „mit vertauschtem Anfangs- und Endzustand“) und „invers“ (= „mit vertauschter Zeitrichtung“) verwechselt, da der Unterschied bei Mittelungen über die Raumrichtungen verschwindet. Die gesuchte Emissionswahrscheinlichkeit wird also (auf dem Wege über das Matrixelement) auf den Stoßquerschnitt des inversen Einfangsprozesses zurückgeführt, in der Hoffnung, für diesen leichter einen plausiblen Näherungswert finden zu können.

$$n_\varepsilon = \frac{(2j + 1) m \varepsilon \sigma'}{\pi^2} \frac{\vartheta'}{\vartheta}. \quad (2)$$

Hierbei bedeutet  $m$  die Masse,  $j$  den Spin und  $\varepsilon$  die kinetische Energie des  $z$ -Partikels,  $\sigma'$  den Wirkungsquerschnitt für den zu (1) inversen Prozeß und  $\vartheta$  bzw.  $\vartheta'$  die Termdichte von  $Z$  bzw.  $Z'$  (im Anfangs- bzw. Endzustand)<sup>12</sup>. Die Termdichten können nach Boltzmann durch die Entropien ausgedrückt werden. Zwischen der Boltzmannschen „Kombinationszahl“  $W$  und der Dichte  $\vartheta$  der Energierterme besteht für nicht zu kleine Anregungen nach Bethe<sup>13</sup> die Beziehung

$$e^S = \sqrt{2\pi C} T \cdot \vartheta \quad (S > 1). \quad (3)$$

Dabei bedeutet  $T$  die absolute Temperatur,  $C$  die Wärmekapazität und  $S$  die Entropie des Kerns. (Der Dimensionsfaktor ist im Vergleich zu  $\vartheta$  nur schwach veränderlich.) Zur Berechnung von  $\vartheta$  genügt also wegen

$$S = \int_0^T dT \frac{C}{T} \quad \text{und} \quad U = U_0 + \int_0^T dT C \quad (4)$$

bereits die Kenntnis der inneren Energie  $U$  als Funktion der Temperatur. Um (2) auswerten zu können, muß man demzufolge den Absorptionsquerschnitt  $\sigma$  als Funktion der kinetischen Energie  $\varepsilon$ , die Bindungsenergie  $-U_0$  und schließlich die Tem-

<sup>11</sup> Wir skizzieren kurz die Überlegung, die zu (2) führt: Nach der Diracschen Störungsrechnung, angewandt auf nicht zu lange und nicht zu kurze Zeiten, läßt sich das gesuchte  $n_\varepsilon$  leicht ausrechnen, sofern nur das Absolutquadrat des Matrixelements der Störenergie  $H_1 = H - H_0$  bekannt ist. Dies können wir nun, da

$$|(Z' + z | H_1 | Z)|^2 = |(Z | H_1 | Z' + z)|^2$$

ist, umgekehrt durch die Wahrscheinlichkeit des „reversen“ Prozesses ausdrücken:

<sup>12</sup> Wir verwenden natürliche Einheiten:  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $k = 1$ . Mit  $e$  bezeichnen wir die rationell definierte Elementarladung positiven Vorzeichens:  $e = +\sqrt{4\pi}/137$ . Die Energie geben wir durch ihr Atomgewicht an:  $M_{0,16} = 16$ . Dann ist  $10^{-3} = 0,933 \text{ MeV} = 1,08 \cdot 10^{10} \text{ Grad}$ ;  $M_p = M_n = 1,008$ ;  $1 = 0,212 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 0,708 \cdot 10^{-24} \text{ sec}$ ;  $\lambda_p \approx \lambda_n \approx \lambda_\pi/2\pi \approx \frac{1}{2} (\lambda_e/2\pi)/137 \approx R_0 \approx 6 \cdot 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ .

<sup>13</sup> H. A. Bethe, Rev. Mod. Physics 9, 69, 81 [1937].

peratur  $T$  als Funktion der Anregungsenergie  $U - U_0$  kennen, und zwar alle drei noch als Funktion der Protonenzahl<sup>10</sup>  $Z$  und der Neutronenzahl  $N = A - Z$ . Vermutlich hängt auch  $\sigma$  ein wenig von  $T$  ab. In die Größen  $\sigma'$  und  $\vartheta'$  sind an Stelle von  $N, Z, U, T$  usw. die entsprechenden gestrichenen Größen des Endzustandes einzusetzen. Zu diesem Zwecke ist es noch nötig, die Teilchenbilanzen (1) durch die Energiebilanz

$$U = U' + u + E' + \varepsilon \quad (5)$$

zu vervollständigen. Hierin bedeutet  $-u$  die Bindungsenergie des herausfliegenden  $z^a$ -Kernes und  $E'$  die Rückstoßenergie. Wir rechnen im Ruhesystem von  $Z$  (bzw. im Schwerpunktsystem von  $Z' + z$ ). Die Impulsbilanz ergibt:

$$E' = \frac{m}{M'} \varepsilon = 1,00 \cdot \frac{A}{A'} \varepsilon. \quad (6)$$

Ein Kern  $Z^A$  hat nämlich, wie bekannt, die Masse

$$M = ZM_p + NM_n + U \approx 1,00 A, \quad (A > 3) \quad (7)$$

denn  $M_p = M_n = 1,00_s$  und, vgl. (22), (23),  $U \approx U_0 = -0,00_9$  für  $A > 3$ ; für kleinere  $A$  findet man  $M$  in Tab. 1. Die entscheidende Voraussetzung für die Gültigkeit der Relation (2) ist die Reversibilität des Prozesses (1), und das bedeutet Beschränkung auf kleine Werte von  $a$ . Für  $a \gtrsim 10$  wird die Verdampfungswahrscheinlichkeit sehr gering; man hat es dann vornehmlich mit der irreversiblen „Kernspaltung“ zu tun (vgl. Abschnitt 3). Wir setzen stets

$$a \equiv -\Delta A \ll A \quad (8)$$

voraus, d. h., wir berücksichtigen in Entwicklungen nach Potenzen von  $\Delta A/A$  immer nur das erste nichtverschwindende Glied. Insbesondere kann in (5)  $E'$  vernachlässigt werden:  $\Delta U = -(u + \varepsilon)$ . Andererseits ist  $\Delta U = CAT - \frac{\partial U}{\partial N} n - \frac{\partial U}{\partial Z} z$ . Wir benutzen

diese Beziehung, um in  $\Delta S = \frac{C}{T} \Delta T - \frac{\partial S}{\partial N} n - \frac{\partial S}{\partial Z} z$  die verdampfte Wärmemenge  $-CAT$  durch den emittierten Energiebetrag  $u + \varepsilon$  auszudrücken. Führen wir noch zur Abkürzung die Freie Energie

$$F = U - TS \quad (9)$$

ein, und an Stelle von  $N$  und  $Z$  als neue Zustandsvariable die Massenzahl  $A = N + Z$  und den relativen Neutronenüberschuß

$$\theta = \frac{N-Z}{N+Z} \text{ mit } \Delta\theta \equiv \frac{2}{A^2} (Nz - Zn), \quad (10)$$

so wird

$$\Delta S = - \left( \varepsilon + u - \frac{\partial F}{\partial A} a + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta\theta \right) / T. \quad (11)$$

Diese Größe hat man sich in den aus (2) und (3) mit Hilfe von (8) folgenden Ausdruck

$$n_\varepsilon = \frac{(2j+1) m \varepsilon \sigma}{\pi^2} e^{\Delta S} \quad (12)$$

eingesetzt zu denken. Dessen Geltungsbereich ist durch die Ungleichungen

$$9 \cdot 10^{-3} < U - U_0 < A \cdot 9 \cdot 10^{-3} \quad (13)$$

bezeichnet. Die obere Grenze ergibt sich, vgl. (22), (23), aus der Bedingung  $U < 0$ . Sie ist meist erfüllt, weil es schwer ist, einen Kern noch höher anzuregen: gegenüber extrem energiereichen kosmischen Teilchen sind die Kernnukleonen als frei anzusehen, und ihr Wirkungsquerschnitt ist gering. Mit  $U > 0$  würde sich der Kern rasch in seine Bestandteile auflösen; die Verdampfungstheorie wird dann ungültig. Die untere Grenze des Geltungsbereichs ist dagegen rein rechnerisch bedingt, und zwar durch die Verwendung der Näherung (8). Die Formeln werden falsch, sobald die Energie  $U$  nicht mehr ausreicht, um (5) zu erfüllen. D. h., es muß  $U - U_0 > a \cdot 9 \cdot 10^{-3} + V + u$  sein ( $V = \varepsilon_{\min}$  ist die Höhe des zu überschreitenden Coulomb-Walles). Für  $U - U_0 < 9 \cdot 10^{-3}$  reicht die Energie nicht einmal mehr zur Emission eines Neutrons aus; ein so kalter Kern kann seine Energie nur noch in Form von  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Strahlung abgeben. Den Gln. (12) und (11) entnimmt man, daß die auf 1 normierte Energieverteilungsfunktion überhaupt nur vom Verlauf der Funktion  $\sigma(\varepsilon)$  abhängt:

$$w_\varepsilon \equiv \frac{n_\varepsilon}{\gamma} = \frac{\varepsilon \sigma(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T}}{\int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon \sigma(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T}}; \quad \gamma = \int_0^\infty d\varepsilon n_\varepsilon. \quad (14)$$

Die spezielleren Annahmen über die Thermodynamik der Kerne gehen hier noch gar nicht ein. Diese Funktion  $w_\varepsilon$  eignet sich andererseits auch am besten zum Vergleich mit der Erfahrung, da die experimentelle Bestimmung der absoluten Zeitmaßstäbe  $\gamma^{-1}$  als Funktion der Temperatur ein bedeutend schwierigeres Problem ist. Ein verhältnismäßig scharf auflösendes qualitatives Maß für den Temperaturparameter  $T$  hat man dagegen sofort in der Gesamtzahl der zum Stern gehörigen Spuren.

Für die betrachteten  $\varepsilon$ -Werte von einigen  $10^{-3}$  (bzw. MeV) kann der Absorptionsquerschnitt durch eine Gleichung der Gestalt<sup>14</sup>

$$\sigma = \sigma_0 \iota_+ (\varepsilon - V) \left(1 - \frac{V}{\varepsilon}\right) \quad (15)$$

gut approximiert werden. Aus der klassischen Mechanik würde dieser Wert streng folgen<sup>15</sup>, und zwar mit

$$\sigma_0 = \pi a_0^2, \quad a_0 = R + r \quad \text{und} \quad V_0 = \frac{zZ e^2}{4\pi a_0} \quad (16)$$

als Wert für  $V$ . Hierin sind  $R$  und  $r$  die Radien der Kerne  $Z$  bzw.  $z$ , für die erfahrungsgemäß (und zum Tröpfchenmodell<sup>21</sup> passend)

$$R = A^{1/3} R_0 \quad \text{mit} \quad R_0 = 6,7_2 = 1,4_2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (17)$$

gesetzt werden darf. Für die hier betrachteten mittelschweren Atomkerne mit  $A \approx 2Z \approx 100$  wird  $a_0 \approx 40$  und  $V_0 \approx z \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ , so daß selbst Protonen mit einer Energie  $\varepsilon$  von nur  $\approx 5 \cdot 10^{-3}$  eine reduzierte Wellenlänge  $(\lambda/2\pi) \approx 10$  besitzen, die immer noch viermal kleiner ist als der Wirkungsradius  $a_0$ . Bei den  $\alpha$ -Teilchen mit  $\varepsilon \approx 10 \cdot 10^{-3}$  und  $(\lambda/2\pi) \approx 2,5$  liegen die Verhältnisse noch günstiger. Trotzdem wird dieser „Ortsunschärfe“  $\lambda$  wegen das  $z$ -Teilchen auch dann noch die Möglichkeit haben, in den Kern zu dringen, wenn seine Energie ein wenig unterhalb von  $V_0$  liegt. Es genügt hier, wenn wir diesen „Tunneffekt“ summarisch durch einen Korrekturfaktor  $\kappa < 1$  berücksichtigen, indem wir

$$V = \kappa V_0 \quad (18)$$

setzen. Genauere Berechnungen<sup>16</sup> von  $\sigma$  werden durch (15) bis (18) und

$$\kappa = 1 - 0,4 a^{-1/2} \quad (19)$$

mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben. Damit nimmt Gl. (14) die Form

$$w_\varepsilon = \iota_+ (\varepsilon - V) \frac{\varepsilon - V}{T^2} e^{-(\varepsilon - V)/T} \quad (20)$$

an. Dies soll nun mit dem gemessenen Verlauf verglichen werden.

$$\begin{aligned} {}^{14} \iota_+(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{|x|}\right) \\ &\equiv \begin{cases} 1 & \text{für } x = \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>15</sup> Es genügt bereits die Energie und die Drehimpulsbilanz unter der Voraussetzung einer Zentralkraft  $\mathfrak{K}(|\tau|)$ , von der nur  $\int_{a_0}^{\infty} dr \mathfrak{K} = V(a_0) - V(\infty)$  eingeht.

Die Voraussetzung der Undurchdringlichkeit der Kernmaterie für das einfallende Teilchen wird erst für Einfallenergien problematisch, die groß sind gegen die

Abb. 1 und 2 zeigen einige typische experimentelle Statistiken mit eingezeichneten theoretischen Kurven. Wie man sieht, gelingt es stets, den  $T$ -Parameter in (20) so zu wählen<sup>17</sup>, daß ein großer Teil der beobachteten Spurenzahlen im wesentlichen richtig wiedergegeben wird; ein anderer Teil dagegen, und zwar der mit  $\varepsilon < V$ , kann nicht wiedergegeben werden. Beim He-Spektrum von Sternen mit großen Gesamtspurenzahlen (d. h. hohen Anregungsener-

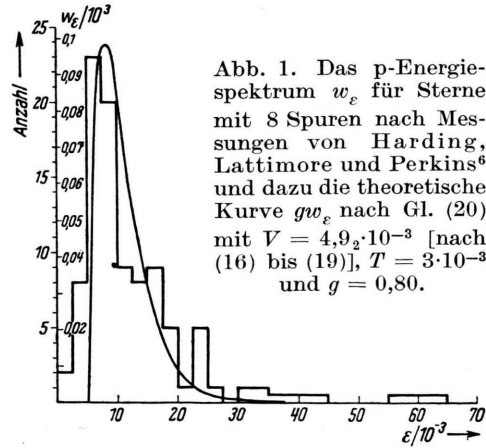


Abb. 1. Das p-Energiespektrum  $w_\varepsilon$  für Sterne mit 8 Spuren nach Messungen von Harding, Lattimore und Perkins<sup>6</sup> und dazu die theoretische Kurve  $gw_\varepsilon$  nach Gl. (20) mit  $V = 4,9_2 \cdot 10^{-3}$  [nach (16) bis (19)],  $T = 3 \cdot 10^{-3}$  und  $g = 0,80$ .

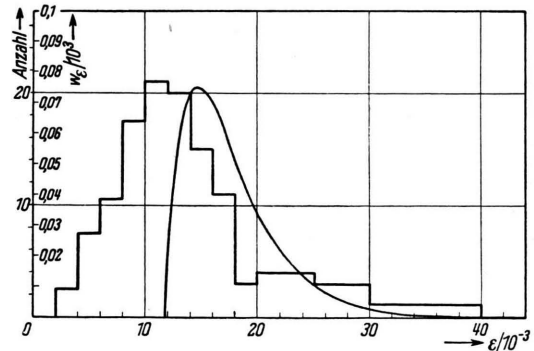


Abb. 2. Das  $\alpha$ -Energiespektrum  $w_\varepsilon$  für Sterne mit 5 bis 6 Spuren nach Messungen von Hodgson<sup>7</sup> und dazu die theoretische Kurve  $gw_\varepsilon$  nach Gl. (20) mit  $V = 11,6_6 \cdot 10^{-3}$  [nach (16) bis (19)],  $T = 3 \cdot 10^{-3}$  und  $g = 0,61$ .

Grenzenergie  $\zeta_0$  der Kernbestandteile [vgl. (32)], und das ist außerhalb des Geltungsbereiches von Gl. (13).

<sup>16</sup> J. Blatt u. V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley and Sons, Inc., New York 1952, S. 345 ff.

<sup>17</sup> Ganz frei ist man bei dieser Wahl nicht, da durch die z. Tl. beobachteten (und angegebenen) Anregungsenergien die Temperatur ungefähr festgelegt ist. Auch aus der Gesamtspurenzahl folgt nach der Verdampfungstheorie ein Mittelwert für die Temperatur; doch ist diese Abhängigkeit bisher nur näherungsweise ausgerechnet worden.

gien) treten diese zu langsamen Emissionsprodukte überraschend häufig auf. Der Tunneleffekt kann dafür nicht verantwortlich gemacht werden, denn wir haben ihn durch die Potentialerniedrigung (18), (19) im wesentlichen berücksichtigt. Noch langsamere Teilchen als solche mit  $\varepsilon = 0,6 V_0$  können den Berg nur noch selten durchdringen, und für die  $\alpha$ -Teilchen müßte dieser exponentielle Abfall ihrer größeren Masse wegen sogar noch stärker sein als bei den Protonen.

Es ist versucht worden, diesen Effekt zu erklären<sup>18</sup> durch die von der hohen Anregung bewirkte Ausdehnung des Kernes und durch die dabei stattfindenden Oberflächenschwingungen, aus denen ebenfalls eine Erniedrigung des Potentialtopfes folgt. Wir halten diese Deutung für quantitativ nicht ausreichend und glauben, die Abhängigkeit  $\sigma(T)$  vernachlässigen zu dürfen. Vor allem muß eingewandt werden, daß der starke Unterschied zwischen dem H- und dem He-Spektrum unverstanden bleibt. Ebenso unverständlich bleibt so auch die Notwendigkeit, (20) mit einem Gewichtsfaktor  $g < 1$  zu multiplizieren, um wenigstens die schnelleren Teilchen richtig darstellen zu können. Es kann eben wirklich nur *ein Teil* der Spuren durch die reguläre Verdampfung beschrieben werden. Der andere Bruchteil,  $1 - g$ , tritt sicher *zusätzlich* hinzu.

Gegen den letzten Einwand ist folgender im übrigen ähnlicher Deutungsversuch<sup>6</sup> geschützt. Danach werden die zu langsamen  $\alpha$ -Teilchen nicht „verdampft“, sondern noch vor Einstellung des thermischen Gleichgewichts mit viel kleinerer Zeitkonstante von örtlich stark überhitzten und aufgeblähten Stellen der Kernoberfläche aus emittiert. Dafür scheint zu sprechen, daß so auch der Überschuß an besonders schnellen  $\alpha$ -Teilchen (s. Abb. 2) und die beobachtete Winkelkorrelation der  $\alpha$ -Spuren erklärt werden könnten. Es ist aber nicht zu sehen, wie der gleiche Schluß für die Protonen vermieden werden kann. Besonders die „zu schnellen“ Partikel müßten beim p-Spektrum erst recht erwartet werden.

Führt man diese beiden Vorstellungen ins Extreme durch, so gelangt man schließlich zu der Vermutung, daß die hochangeregten und folglich stark schwingenden Silber- und Bromkerne relativ häufig spalten werden. Setzen wir dies voraus, so ist zunächst klar, daß die zu überwindenden Potential-

berge dann größtenteils nur noch etwa halb so hoch sein werden<sup>18</sup>. Außerdem kommt dann aber noch der folgende entscheidende Gesichtspunkt hinzu: Die beiden neuen Verdampfungszentren werden sich mit hohen Geschwindigkeiten voneinander weg bewegen. Unter der weiteren Annahme, daß die Geschwindigkeiten der von ihnen emittierten  $\alpha$ -Teilchen etwa ebenso groß sind, wird nun verständlich, wieso Spuren mit sehr kleinen Energien auftreten können: Für He-Kerne, die entgegengesetzt zur Flugrichtung emittiert werden, können sich die beiden Bewegungen weitgehend kompensieren. Daß die Protonen nicht in solchem Ausmaß davon betroffen sind, kann daran liegen, daß sie ihrer geringeren Masse wegen schneller sind als die Kernsplitter, aus denen sie stammen. Schließlich findet auch der Gewichtsfaktor  $g$  eine einfache Deutung: Er ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Spaltung *nicht* eintritt, der Verdampfungsvorgang also „regulär“ verläuft. In den restlichen Fällen wird die Verdampfung vom Schwerpunktssystem des jeweiligen Splitters aus gesehen ebenso regulär sein; vom gemeinsamen Schwerpunkt aus betrachtet wird jedoch das Geschwindigkeitsspektrum (und also erst recht das Energiespektrum) mehr oder weniger stark verbreitert erscheinen. Da diese Deutung nicht unplausibel ist, soll nun versucht werden, ihre beiden Voraussetzungen quantitativ zu prüfen. In den Abschnitten 2 und 3 wird eine Abschätzung angegeben für die Zeitkonstanten der beiden miteinander konkurrierenden Prozesse, den der Verdampfung und den der Spaltung, und im 4. Abschnitt wird besprochen, was als Ergebnis ihres Zusammenwirkens zu erwarten ist.

## 2. Die Verdampfungswahrscheinlichkeit

Zur Berechnung der Zeitkonstanten des Verdampfungsprozesses (1) müssen wir auf die Gln. (12), (11), (10) und (15) bis (19) zurückgreifen und dazu die Abhängigkeit der Energiefläche als Funktion der Temperatur ermitteln. Aus  $U(T, A, \theta)$  lassen sich nämlich nach (4) und (9) die anderen thermodynamischen Funktionen sofort ableiten.

Für die Massendefekte  $-U_0$  der Grundzustände benutzen wir die auf dem Tröpfchenmodell beruhende<sup>19</sup> halbempirische Formel von C.F.v. Weizsäcker:

<sup>18</sup> E. Bagge, Physik. Z. **44**, 461 [1943].

<sup>19</sup> Etwas richtiger wäre es wohl, wenn man in (21) im Coulomb-Glied  $Z^2$  durch  $Z(Z-1)$  ersetzte (die elektrostatischen Selbstenergien der Protonen stecken

bereits in  $M_p$ ), doch ist der Unterschied für nicht zu leichte Kerne (für kleine  $Z$  ist die Tröpfchenvorstellung ohnehin wenig angemessen) nur sehr gering.

$$U_0 = -15,74 \cdot 10^{-3} A + 22 \cdot 10^{-3} A \theta^2 + 16,5 \cdot 10^{-3} A^{\frac{2}{3}} + \frac{3e^2}{20\pi R_0} Z^2 A^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

bzw. in einer oft zweckmäßigeren Form

$$U_0 = -\alpha(A) + \beta(A) \{\theta - \theta_0(A)\}^2 \quad (22)$$

mit

$$\alpha = A(15,74 - 16,5 A^{-\frac{1}{2}} - 22 \theta_0) \cdot 10^{-3} \approx A \cdot 9 \cdot 10^{-3},$$

$$\beta = A^{5/3} \cdot 0,163 \cdot \theta_0^{-1} \cdot 10^{-3} \approx \frac{5}{2} \alpha \quad (23)$$

und

$$\theta_0 = \frac{1}{1 + 135 A^{-\frac{2}{3}}} \quad (24)$$

Im folgenden werden wir uns auf die „Talsohle“

$$\theta = \theta(A) \quad (25)$$

beschränken können, da relative Neutronenüberschüsse  $\theta$ , für die  $\beta(\theta - \theta_0)^2$  nicht mehr  $\ll \alpha$  ist, nur selten auftreten werden.

Die spezifischen Wärmen der Kernmaterie sind nicht so sicher bekannt. Was für Freiheitsgrade hat der Kern und wieviele davon sind bei einer bestimmten Temperatur angeregt? Zunächst bieten sich die beiden folgenden Vorstellungen an, mit deren Hilfe man versuchen wird, die wahren Verhältnisse zu approximieren: Die eine<sup>20</sup> geht von freien Teilchen aus, behandelt den Kern also in erster Näherung als ideales Gas, und führt dann die Wechselwirkung als Störung ein. Sie ist insofern nicht sehr befriedigend, als ja doch die Wechselwirkung gewiß nicht klein gegen die kinetischen Energien sein kann. Das äußert sich bereits darin, daß die das Gas zusammenhaltenden Oberflächenkräfte zusätzlich postuliert werden müssen, und zwar in Form einer äußeren starren Wand. Das andere Modell<sup>21</sup> geht vom entgegengesetzten Extrem aus, indem es die Kernmaterie in erster Näherung als inkompressible Flüssigkeit der Dichte  $\rho = (3/4\pi) \cdot 1,00 \cdot R_0^{-3}$  und der Oberflächenspannung  $s = (1/4\pi) 16,5 \cdot 10^{-3} \cdot R_0^{-2}$ , vgl. Gl. (21), behandelt. Die Wärme, die in den durch die Ober-

flächenkräfte hervorgerufenen wirbelfreien Strömungen steckt, läßt sich berechnen und wird weiter unten angegeben werden. Unbekannt dagegen ist, in welchem Maße die davon unabhängigen transversalen Wellen oder Wirbelströmungen angeregt sind, insbesondere für große Wellenlängen, für welche die rücktreibenden Kräfte gleichfalls nur gering sein werden. Die kurzen Transversalwellen können nämlich ebenso wie die longitudinalen Kompressionswellen für nicht allzuhohe Temperaturen vernachlässigt werden, da sie der starken Kopplungen wegen relativ hohe Frequenzen haben und daher nur selten angeregt werden. Von einem solchen, mit einer statischen Kompressibilität sich begnügenden Bild ist zu erwarten, daß es die Bewegungsmöglichkeit der inneren Kernnukleonen zu stark beschneidet und folglich eine zu kleine spezifische Wärme liefert. Da die Protonen und die Neutronen untereinander dem Pauli-Prinzip genügen, gibt es eine starke Nullpunktsbewegung, die bei tiefen Temperaturen vermutlich verhältnismäßig leicht anregbar ist (sie verleiht dem Kerninneren auch bei sehr starker Wechselwirkung gewisse gasähnliche Züge). Das durchschlagende Argument jedoch dafür, daß das Thomas-Fermi-Modell<sup>20</sup> des Atomkerns neben dem Tröpfchenmodell nicht ganz vernachlässigt werden darf, ist der Erfolg des Schalen- bzw. Einteilchenmodells<sup>22,23</sup> bei der Beschreibung der niedrigsten Energieterme. Schließlich beweisen die Arbeiten von Rainwater, Bohr und Reifman<sup>24</sup>, daß es nützlich ist, den Kern als ein von einer schwingfähigen Haut umgebenes ideales Fermi-Gas konstanten Volumens anzusehen. Diese Vorstellung, für die wir die Bezeichnung „Gaströpfchenmodell“ vorschlagen\*, enthält zwei heterogene Bestandteile und erscheint vom Standpunkt jeder der beiden oben erwähnten Kernmodelle aus als nicht konsequent, zum mindesten als nicht begründet, soll aber als empirisch bewährte und einfach zu behandelnde Interpolation den nun folgenden Rechnungen zugrunde gelegt werden<sup>25</sup>.

<sup>20</sup> H. A. Bethe, Physic. Rev. **50**, 977 [1936]; J. R. Oppenheimer u. R. Serber, Physic. Rev. **50**, 391 [1936]; J. Bardeen, Physic. Rev. **51**, 799 [1937].

<sup>21</sup> N. Bohr u. F. Kalckar, Kgl. danske Vidensk. Selsk. Skr., naturvidensk. math. Afdel. **14**, Nr. 10 [1937].

<sup>22</sup> W. M. Elsasser, J. Physique Radium **4**, 459 [1933]; **5**, 389, 635 [1934]; M. Goeppert-Meyer, Physic. Rev. **74**, 235 [1948]; **75**, 1969 [1949]; **78**, 16, 22 [1950]. O. Haxel, J. H. D. Jensen u. H. E. Suess, Naturwiss. **35**, 376 [1948]; Z. Physik **128**, 295 [1950].

<sup>23</sup> R. Schulten, Dissertation Göttingen 1953, erscheint voraussichtlich in Z. Naturforsch. **8a** [1953].

<sup>24</sup> J. Rainwater, Physic. Rev. **79**, 432 [1950]; A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd. **26**, no. 14 [1952]; A. Reifman, Dissertation Göttingen 1953, erscheint voraussichtlich in Z. Naturforsch. **8a** [1953].

\* Anmerkung bei der Korrektur.

<sup>25</sup> An dieser Stelle taucht die Frage auf, ob es bei Zugrundelegung eines bestimmten einfachen Kernmodells nötig ist, zur Berechnung von Termdichten thermodynamische Vorstellungen einzuführen. Sie ist grundsätzlich mit Nein zu beantworten. Doch ist zu sagen, daß es geradezu der Sinn der thermodynamischen Begriffe ist, kombinatorische Aufgaben solcher

Unter dieser Annahme beträgt die Anregungsenergie nach der Planckschen Oszillatorformel und dem Pauli-Prinzip<sup>26</sup>

$$U - U_0 = \frac{4R^3}{3\pi} \int_0^\infty p^2 dp \left\{ \frac{p^2/2 M_p}{e^{(p^2/2 M_p - \zeta_N)/T} + 1} + \frac{p^2/2 M_n}{e^{(p^2/2 M_n - \zeta_N)/T} + 1} \right\} + \sum_{l=2}^{l_0-1} \frac{(2l+1) \omega_l}{e^{\omega_l/T} - 1}, \quad (26)$$

wobei die „Grenzenergien“  $\zeta(T)$  implizit durch die Bedingungen

$$Z = \frac{4R^3}{3\pi} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{(p^2/2 M_p - \zeta_N)/T} + 1}$$

$$\text{und } N = \frac{4R^3}{3\pi} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{(p^2/2 M_n - \zeta_N)/T} + 1} \quad (27)$$

gegeben sind, die Oberflächenfrequenzen die Werte

$$\omega_l = \sqrt{l(l-1)(l+2)} \omega$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{s/\rho R^3} = 11,0 \cdot 10^{-3} A^{-1/2} \quad (28)$$

annehmen<sup>27</sup> und die Abschneidevorschrift für die Summe dadurch definiert ist, daß die Anzahl  $\sum_{l=2}^{l_0-1} (2l+1) \approx l_0^2$  der Schwingungsmöglichkeiten gleich der dreifachen Zahl der in der Kernoberfläche sitzenden Nukleonen sein muß<sup>28</sup>. Setzt man für die „Dicke der Oberfläche“ den mittleren Nukleonabstand, also  $\approx R_0$ , so wird

$$l_0 \approx 3A^{1/3}. \quad (29)$$

Die kürzeste noch zugelassene Oberflächenwelle hat hiernach<sup>29</sup> die Länge  $\lambda_0 \approx 2R_0$ . Im Temperaturbereich

$$A^{-1/2} \cdot 11 \cdot 10^{-3} < T < 8 \cdot 10^{-3} \quad (30)$$

kann (26) leicht ausgewertet werden. In erster Näherung hat man

$$U = U_0 + K_1 A T^2 + K_2 A^{2/3} T^{7/3} \quad (31)$$

Art auf einfachste Weise zu formulieren und näherungsweise zu lösen. Eine Abhängigkeit vom Volumen (bzw. Druck) oder einem anderen äußeren Parameter brauchen wir nicht mit hinzuschreiben, da wir annehmen können, daß der makroskopische Zustand der Kernmaterie durch  $A$ ,  $\theta$  und  $U$  eindeutig festgelegt ist. Die Größen  $\partial F/\partial Z$ ,  $\partial F/\partial N$  bzw.  $\partial F/\partial A$  sind die sog. chemischen Potentiale  $\mu_Z$ ,  $\mu_N$  bzw.  $\mu_A$ .

<sup>26</sup> Die Bewegung der beiden Nukleonensorten ist nach der Fermi-Dirac-Statistik zu quantisieren, die der „Oberfläche“ dagegen nach der Bose-Einstein-Statistik; die kanonischen Lage- und Bewegungskordinaten der Kapillarwellen genügen Minusvertauschungsrelationen, da sie sich aus (in  $\psi_p$  bzw.  $\psi_n$ ) quadratischen Ausdrücken herleiten. Bei einmaliger Anregung sind die Amplituden  $\approx 0,1 \cdot R$ .

mit

$$K_1 = \frac{\pi^2}{4} \zeta_0^{-1} = 2 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{4/3} M_n R_0^2 = 0,0935 \cdot 10^3$$

$$\text{und } K_2 = \frac{4}{3} \left( \frac{4}{3} \right)! \zeta \left( \frac{4}{3} \right) \cdot \omega^{4/3} = 0,0918 \cdot 10^4. \quad (32)$$

Hierin bedeutet  $\zeta_0 \approx \zeta_{A/2}(0) = 26,4 \cdot 10^{-3}$  die maximale Nullpunktsenergie von  $A/2$  Neutronen (oder Protonen) im Volumen  $(4\pi/3) R_0^3 A$ . In  $K_1$  ist ein durch den Neutronenüberschuß bewirkter Korrekturfaktor  $1 - (1/9) \theta^2$  vernachlässigt worden. Wollte man sich mit dieser Näherung nicht begnügen, so hätte man mit zu berücksichtigen, daß der Neutronenüberschuß das Kernvolumen ein wenig vergrößert, d. h., man hätte (17) durch  $R = A^{1/3} R_0 \cdot (1 + c \theta^2)$  zu ersetzen. Das würde sich auf  $\omega$ ,  $\zeta_0$ ,  $K_1$  und  $K_2$  auswirken, z. B. hätte man in  $K_1$  den Faktor  $-(1/9)$  durch  $2c - (1/9)$  zu ersetzen. Der genaue Wert von  $c$  ist nicht bekannt; er hängt stark von den speziellen Annahmen über die nur zusätzlich zu postulierenden Wechselwirkungen ab. Analoges gilt für die durch die Coulombsche und die thermische Ener-

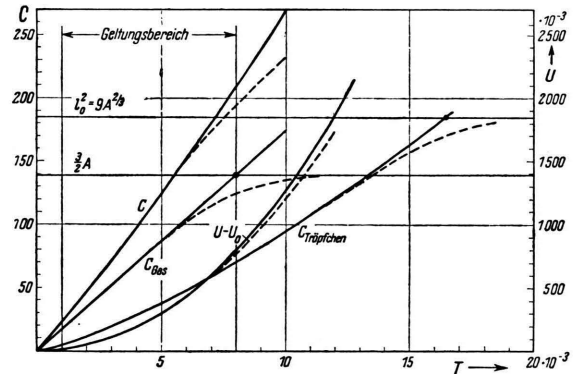


Abb. 3. Die wichtigsten thermodynamischen Funktionen des Nb<sup>93</sup>-Kernes nach dem von uns verwandten Modell. Die ausgezogenen Kurven stellen die benutzte Näherung dar, die gestrichelten ungefähr den wahren, aus den Gln. (26) bis (29) folgenden Verlauf.

<sup>27</sup> Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 29, 91 [1879]. Die durch die Coulomb-Kraft hervorgerufene Erniedrigung der Frequenzen kann hier vernachlässigt werden.

<sup>28</sup> Die kinetischen Freiheitsgrade der Oberflächen-nukleonen werden dabei doppelt gezählt. Das ist eine der oben erwähnten Inkonsistenzen des Modells. Auf der anderen Seite haben wir jedoch die in den Kompressionsschwingungen und Rotationsbewegungen stekende Energie ganz weggelassen, was diesen Fehler vermutlich zum Teil kompensiert; in welchem Maße diese Freiheitsgrade eingefroren sind, ist nicht genau bekannt.

<sup>29</sup> Ähnlich wie in der Debeyeschen Theorie der spezifischen Wärme des Festkörpers.

gie verursachten Ausdehnungen des Kernvolumens und die daraus folgenden Vergrößerungen der spezifischen Wärme. Für  $T < A^{-1/2}\omega$  hätte man das Glied  $K_2 A^{2/3} T^{7/3}$  durch  $5\sqrt{8} A^{-1/2} \omega e^{-V/8 A^{-1/2} \omega/T}$  zu ersetzen. Der Unterschied ist jedoch unbedeutend, er beträgt nur wenig mehr als ein Zehntel der gesamten Anregungsenergie, die selbst nicht größer als  $10 \cdot 10^{-3}$  wird (für  $A \approx 100$ , vgl. Abb. 3), also allenfalls noch zur Emission eines einzigen Nukleons ausreicht. Bei  $T = (3/\pi^2) \zeta_0 = 8,0 \cdot 10^{-3}$  dagegen geht die spezifische Wärme  $2K_1 AT$  in den konstanten klassischen Wert  $(3/2)A$  über (Abb. 3). Die entsprechende Entartungstemperatur für die Kapillarwellen liegt doppelt so hoch, nämlich bei  $(27/7K_2)^{3/4} = 16,5 \cdot 10^{-3}$ . Doch wird bei  $8 \cdot 10^{-3}$  bereits  $U - U_0 \approx 800 \cdot 10^{-3}$  (für  $A \approx 100$ ), d. h.  $U \approx 0$ . Die beiden Geltungsbereiche (13) und (30) sind also gerade praktisch deckungsgleich. Aus (31) folgt nun mit (4)

$$C = 2K_1 AT + \frac{7}{3} K_2 A^{2/3} T^{4/3},$$

$$S = 2K_1 AT + \frac{7}{4} K_2 A^{2/3} T^{4/3} \quad (33)$$

und mit (9), (22) und (25)

$$F = -\alpha(A) - K_1 AT^2 - \frac{3}{4} K_2 A^{2/3} T^{7/3} \quad (34)$$

Dies setzen wir in (11) und (12) ein ( $\partial F/\partial \theta = 0$ ) und erhalten wegen (15)

$$n_\varepsilon = \frac{(2j+1)m\sigma_0}{\pi^2} \ell_+ (\varepsilon - V) \cdot (\varepsilon - V)$$

$$e^{-(\varepsilon + u + a\alpha')/T - K_1 AT - \frac{1}{2} K_2 A^{2/3} T^{4/3}}. \quad (35)$$

<sup>30</sup> Es ist darüber diskutiert worden, wie es zu verstehen sei, daß  $\gamma(T)$  nach (36) für große  $T$  schließlich wieder abnimmt, denn es ist schwer vorzustellen, wie durch stärkeres Erhitzen der Verdampfungsvorgang gehemmt werden kann. Nun ist solch ein Verhalten thermodynamisch zwar sehr wohl denkbar, aber es ist doch wohl kein Zufall, daß das Maximum von  $\gamma$  bei  $T \approx 10 \cdot 10^{-3}$  liegt, d. h. bei einer Temperatur, bei der

Die gesuchte sekundliche Gesamtwahrscheinlichkeit  $\gamma = \int_0^\infty d\varepsilon n_\varepsilon$  für die Verdampfung eines  $z$ -Partikels beträgt demzufolge

$$\gamma = \frac{(2j+1)m\sigma_0}{\pi^2} T^2$$

$$e^{-(V+u+a\alpha')/T - K_1 AT - \frac{1}{2} K_2 A^{2/3} T^{4/3}} \quad (36)$$

Der Geltungsbereich von (36) und (20) ist in (13) bzw. in (30) angegeben, die Werte von  $\sigma_0$ ,  $V$ ,  $\alpha(A)$ ,  $K_1$  und  $K_2$  in (16), (17), (18), (19), (23) und (32) und die von  $j$ ,  $m$  und  $u$  in Tab. 1. Durch Summation über die verschiedenen leichten Kerne läßt sich die Zeitkonstante

$$\tau^{-1} = \sum_{z,a} \gamma(z^a, A, T) \quad (37)$$

des gesamten Verdampfungsprozesses als Funktion des Atomgewichts und der Temperatur berechnen; die Konvergenz ist sehr gut. Als Emissionsprodukte kommen jedoch, das muß besonders für die Diskussion der experimentellen Statistiken für die Emissionsverhältnisse verschiedener Kerne betont werden, auch die angeregten Zustände in Frage. Leider ist ihre Anzahl sowie ihr statistisches Gewicht und ihre Bindungsenergie  $-u$  nur unvollständig bekannt. Zur Gesamtwahrscheinlichkeit tragen sie aber (des Faktors  $e^{-u/T}$  wegen) nur wenig bei. Die Ergebnisse sind in Abb. 4 für den Kern  $\text{Nb}^{93}$ , der als Mittel über die Silber- und Bromkerne gedacht ist, in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Die Abhängigkeit von  $A$  ist nicht empfindlich<sup>30</sup>. Im

[nach Gl. (30)] der benutzte Ausdruck für die spezifische Wärme seine Gültigkeit verliert („Entartungstemperatur“) und bei der zugleich [nach Gl. (13)] der Kern sich aufzulösen beginnt („Siedetemperatur“). Der Abfall der absoluten Zeitkonstanten findet also gar nicht mehr statt, wohl aber hat z. B. das Emissionsverhältnis  $\gamma_\alpha/\gamma_p$ , wie durch die Erfahrung bestätigt wird, ein Maximum.

$z^a$	$n = \text{Nn}^1$	$p = \text{H}^1$	$d = \text{H}^2$	$t = \text{H}^3$	$\text{He}^3$	$\alpha = \text{He}^4$	$\text{He}^5$	$\text{He}^6$
$j$	1/2	1/2	1	1/2	1/2	0	3/2	0
$u/10^{-3}$	0	0	— 2,38	— 9,10	— 8,28	— 30,25	— 29,28	— 31,3
$m$	1,009	1,008	2,014	3,017	3,016	4,004	5,013	6,020

$z^a$	$\text{Li}^5$	$\text{Li}^6$	$\text{Li}^7$	$\text{Li}^8$	$\text{Be}^7$	$\text{Be}^8$	$\text{Be}^9$	$\text{Be}^{10}$
$j$	3/2	1	3/2	2	3/2	0	3/2	0
$u/10^{-3}$	— 28,7	— 34,2	— 41,9	— 44,1	— 40,2	— 60,5	— 62,2	— 69,5
$m$	5,014	6,016	7,017	8,024	7,019	8,006	9,013	10,014

Tab. 1.

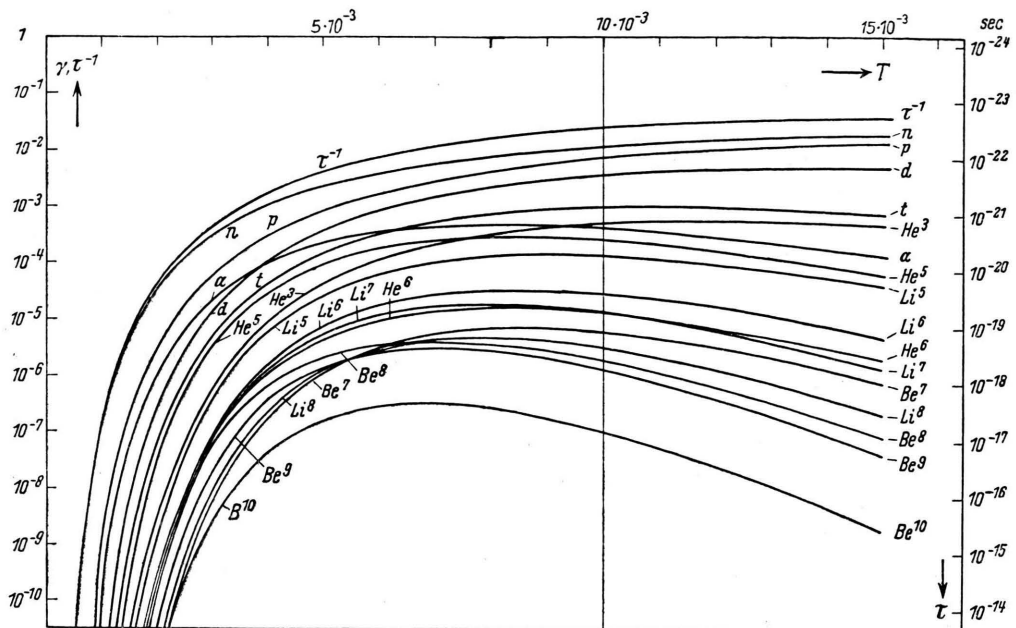
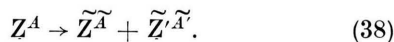


Abb. 4. Die berechneten sekundlichen Emissionswahrscheinlichkeiten  $\gamma(T)$  für  $\text{Nb}^{93}$  und deren Summe, die reziproke mittlere Lebensdauer  $\tau^{-1}$ . Die Emissionsprodukte laufen über sämtliche Grundzustände von  $z = 1$  bis 4; angeregte Kerne und solche mit höherer Ladungszahl werden sehr selten emittiert.

folgenden Abschnitt soll nun im Vergleich dazu die Lebensdauer  $\tilde{\tau}$  gegen Spaltung abgeschätzt werden.

### 3. Die Spaltungswahrscheinlichkeit

Zur Diskussion stehen Spaltprozesse der Art



Da sie ein kompliziertes hydrodynamisch-thermodynamisches Problem<sup>31</sup> darstellen, kann man für die zu bestimmende Zeitskala des Prozesses keine große Genauigkeit erwarten. Der hohen Anregung wegen führt die Oberfläche des  $Z^A$ -Kernes heftige Bewegungen aus, und es ist nun die Frage, wie lange

man im Mittel warten muß, bis der Kern zufällig einmal eine Gestalt erreicht, bei der sich die die Kugelgestalt anstrebenden Kapillarkräfte mit den auseinanderdrängenden Coulomb-Kräften die Waage halten. Im Gegensatz zur Verdampfung ist die Spaltung ein irreversibler Prozeß, da es äußerst unwahrscheinlich ist, daß die beiden Spaltprodukte (bei dem Versuch, den Prozeß umzukehren) gerade die Kapillarschwingungen (mit den richtigen Phasen) ausführen, die die Überwindung des hohen Coulomb-Berges ermöglichen. Nach Bohr und Wheeler<sup>32</sup> gilt für die Wahrscheinlichkeit  $\tilde{n}_{E^*} dE^* dt$ , daß der Kern in der Zeit  $dt$  den (mit \* bezeichneten) labilen Zwischenzustand mit einer kinetischen Ener-

<sup>31</sup> Die Quantenzahlen sind so hoch, daß die klassische Näherung genügt.

<sup>32</sup> N. Bohr u. J. A. Wheeler, Physic. Rev. **56**, 426 [1939]. Zur Herleitung von (39) denken sich die Verfasser (sie greifen dabei z. Tl. auf die Diskussion in E. Wigner, Trans. Faraday Soc. **34**, part 1, 29 [1938] zurück) eine mikrokanonische Gesamtheit von  $\vartheta(U) dU$  Kernen in einer Energieschale des  $6A$ -dimensionalen Phasenraumes des  $Z^A$ -Systems. Die Energieflächen schließen nur für kleine Anregungsenergien den Nullpunkt  $U = U_0$  vollständig ein; für  $U > U_0^*$  liegen sie (dicht) oberhalb eines Sattelpunktes und führen ins Freie, d. h., gewisse Lagekoordinaten können beliebig groß werden: der Kern kann spalten. Gesucht ist die Anzahl der betrachteten Kerne, die sich voraussichtlich im Ausgang dieser hochdimensionalen „Höhle“

befinden. Postuliert man (was durch den Liouville'schen Satz nahegelegt ist) wie üblich für alle Zustände gleiche Wahrscheinlichkeit, so ist sie offenbar gleich der Anzahl der Phasenraumzellen  $h^{3A}$ , die es dort gibt. Es sei  $q$  eine Lagekoordinate, die den Fortschritt ins Freie mißt und  $p$  die dazu kanonisch konjugierte Koordinate, dann ist  $\vartheta^*(U^* - E^*) dU^* dq dp / h = \vartheta^*(U - E^*) dU dt dE^* / 2\pi$  die in dem durch  $dq dp$  oder  $dt dE^*$  bezeichneten Bereich befindliche Zellenzahl [wobei  $E^*$  der von  $p$  abhängende Teil der Hamilton-Funktion ist, von dem angenommen wird, daß er im Sattelpunkt\* von den anderen Koordinaten nur unbedeutend abhängt;  $U^* = U$ , (43)], d. h. die zu erwartende Zahl der (in  $dt$  und  $dE^*$ ) herausströmenden Kerne. Division durch die Gesamtzahl  $\vartheta dU$  gibt die gesuchte Spaltwahrscheinlichkeit.

gie zwischen  $E^*$  und  $E^* + dE^*$  passiert, der Ausdruck

$$\tilde{n}_{E^*} = \frac{\vartheta^*}{2\pi\vartheta}, \quad (39)$$

wobei  $\vartheta^*(U^*)$  die Dichte der Energierterme in der labilen Gleichgewichtslage ist. Die Energieverteilung interessiert uns hier nicht, sondern nur die sekundliche Gesamtwahrscheinlichkeit

$$\tau^{-1} = \int_0^{U^*-U_0^*} dE^* n_{E^*}. \quad (40)$$

Die mittlere kinetische Energie  $\bar{E}^*$  hat die Größenordnung  $kT$  und kann bei den uns hier interessierenden Anregungsenergien vernachlässigt werden,

$$\bar{E}^* \approx T \ll U_0^* - U_0 \leq U - U_0. \quad (41)$$

Reicht die Anregungsenergie nicht aus, um den Potentialberg zu überschreiten, so kann der durch Gl. (39) erfaßte, nach der klassischen Mechanik ablaufende Spaltungsprozeß nicht stattfinden, d. h. für  $U < U_0^*$  ist man auf den Tunneleffekt angewiesen, und der ist der großen Massen wegen äußerst unwahrscheinlich. Wir beschränken uns auf den Fall

$$\tilde{Z}^A = \tilde{Z}'^A, \quad (42)$$

in dem die beiden Spaltprodukte gleich groß sind. Abweichungen vom symmetrischen Verhalten (die für die Uranspaltung experimentell belegt und vermutlich auf den Schalenaufbau der Kerne<sup>33</sup> zurückzuführen sind) sowie gleichzeitige Bildung kleinerer Splitter (einzelner Neutronen z. B.) können wir näherungsweise vernachlässigen. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die bei der Spaltung frei werdende Energie  $U_0 - 2U_0$  nach Gl. (21) sofort angeben, und auch die Höhe  $U_0^* - U_0$  des zu überwindenden Potentialwalles kann nach den (ebenefalls auf das Tröpfchenmodell gegründeten) Rechnungen von Bohr und Wheeler<sup>32</sup> abgeschätzt werden, vgl. Abb. 5 und 6. Für  $A \approx 100$  wird  $2\tilde{U}_0 - U_0 \approx -10 \cdot 10^{-3}$  und  $U_0^* - U_0 \approx 40 \cdot 10^{-3}$ . Zur Auswertung von Gl. (39) benötigen wir die thermodynamischen Funktionen des Zwischenzustandes und für später auch die des Endzustandes. Ausgangspunkt dazu ist wieder die Energiebilanz

$$U = U^* = 2(\tilde{U} + \tilde{E}). \quad (43)$$

<sup>33</sup> Für die schweren Kerne (oberhalb Blei) wäre diese Näherung recht ungenau, da dem Kern nach Überwindung der Energieschwelle noch ein großer Teil der Verformung bevorsteht, so daß nur ein Teil der Kapillar-

Die frei werdende kinetische Energie  $2\tilde{E}$  setzen wir gleich der Abnahme der potentiellen Energie nach Überwindung des Walles ( $E^*$  haben wir vernachlässigt):

$$2\tilde{E} = U^* - 2\tilde{U}_0, \quad (44)$$

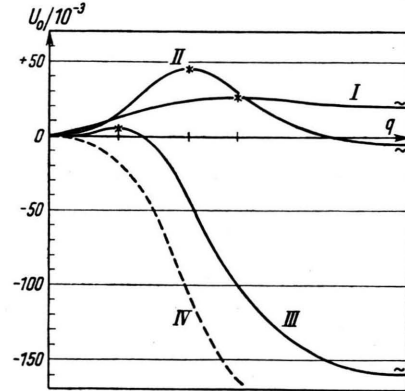


Abb. 5. Die beim Spaltungsprozeß zu überwindende und die durch ihn frei werdende Energie.  $(U_0^* - U_0)/(Z^2/A)$  läßt sich für sehr leichte und für extrem schwere Kerne leicht berechnen (vgl. Abb. 6a und 6c) und für das Zwischengebiet mit einer Ungenauigkeit von etwa 10% interpolieren.  $2U_0 - U_0$  folgt aus Gl. (21).  $q$  bezeichnet den „Deformationsparameter“. Für  $\text{Nb}^{93}$  erhält man  $U_0^* - U_0 = 45,0 \cdot 10^{-3}$  und  $2\tilde{U}_0 - U_0 = -6,8 \cdot 10^{-3}$ , also [vgl. Gl. (44)] für die frei werdende kinetische Energie  $2\tilde{E} = U_0^* - 2\tilde{U}_0 = 51,8 \cdot 10^{-3}$ . I: leichte Kerne ( $\text{O}^{16}$ ); II: mittelschwere Kerne ( $\text{Nb}^{93}$ ); III: schwere Kerne ( $\text{U}^{235}$ ); IV: kritische Kerngröße ( $120^{300}$ ).

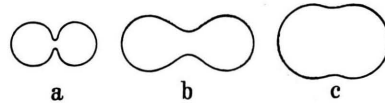


Abb. 6. Der labile Zwischenzustand beim Spaltungsprozeß für a) leichte, b) mittelschwere und c) schwere Kerne.

d. h. wir setzen die thermischen Energien  $U^* - U_0^*$  und  $2(\tilde{U} - \tilde{U}_0)$  des Zwischen- und Endzustandes einander gleich<sup>33</sup>; für  $A \approx 100$  wird so  $2\tilde{E} = 50 \cdot 10^{-3}$ . Schließlich muß noch die Kenntnis der spezifischen Wärmen hinzukommen. Für den Endzustand gibt das kein neues Problem, man braucht nur in (31)  $U, U_0$  und  $A$  durch  $\tilde{U}, \tilde{U}_0$  und  $\tilde{A} = \frac{1}{2}A$  zu ersetzen:

$$2(\tilde{U} - \tilde{U}_0) = K_1 A \tilde{T}^2 + 2^{1/3} K_2 A^{2/3} \tilde{T}^{7/3}. \quad (45)$$

und Coulomb-Energie wirklich frei werden kann. Für die hier betrachteten Kerne mit  $A \approx 100$  ist diese Annahme jedoch durchaus brauchbar; im Limes  $Z \rightarrow 0$  gilt sie streng, vgl. Abb. 6.

Die gesamte Wärmekapazität des Fermi-Gases ist natürlich unverändert, da das Volumen der Kernmaterie (dem Tröpfchenbild gemäß) als konstant angesehen wird und da es auf die Form nicht ankommt. Die Wärmekapazität der Kapillarwellen steigt dagegen auf das 1,26-fache, da die Gesamtoberfläche bei der Spaltung um diesen Faktor ( $2/2^{2/3}$ ) zunimmt. In der labilen Zwischenlage hätte man dementsprechend

$$U^* - U_0^* = K_1 A T^{*2} + \nu K_2 A^{2/3} T^{*7/3}, \quad (46)$$

wenn man den Faktor, um den die Oberfläche im labilen Zustand größer ist als im Anfangszustand, mit  $\nu$  bezeichnet (vgl. Abb. 6b). Auf Grund der Werte von  $U^* - U_0$  und  $2\tilde{U}_0 - U_0$  haben wir so mit Hilfe von (43), (44), (31), (45) und (46) die Zwischentemperatur  $T^*$  und die Endtemperatur  $\tilde{T}$  als Funktion der Anfangstemperatur  $T$  berechnet<sup>34</sup>,

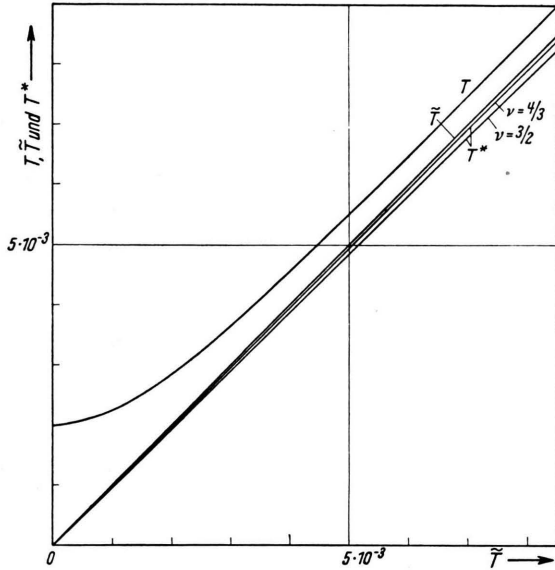


Abb. 7. Die Kerntemperaturen vor, während und nach der Spaltung als Funktion der Endtemperatur.

und zwar für  $\nu = 4/3$  und  $3/2$ , vgl. Abb. 7. Wegen  $C^* = \partial U^*/\partial T^*$  und  $S^* = \int_{-\infty}^T \log T^* \cdot C^*$  kann somit nach (39), (40) die gesuchte Lebensdauer  $\tilde{\tau}$  bestimmt werden. Näherungsweise Ausführung der Integration ( $S^* \gg 1$ ) ergibt:

<sup>34</sup> Die Frage, ob sich die Abkühlung der Oberfläche schnell genug auf das Kerninnere überträgt, ist zu bejahen. Nach Reifman<sup>24</sup> hat nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Stoß eines Gasnukleons gegen die Oberfläche ein Kapillarquant emittiert oder absor-

$$\tilde{\tau} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{C^*}{C}} e^{S-S^*}, \quad (47)$$

wobei in  $C$  und  $S$  die Temperatur  $T$  und in  $C^*$  und  $S^*$  die Temperatur  $T^*$  eingesetzt zu denken ist. Das Ergebnis ist in Abb. 8 aufgetragen, und zwar als Funktion von  $\tilde{T}$ , weil dies die Temperatur ist, auf die es beim Vergleich mit der Verdampfung ankommt. Wie man sieht (und wie zu erwarten war),

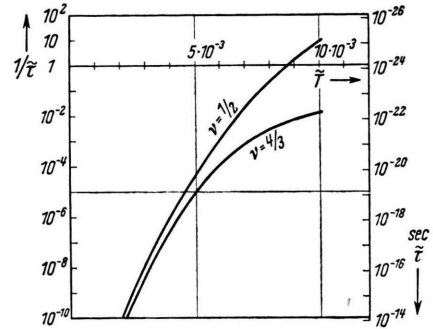


Abb. 8. Die abgeschätzte mittlere Lebensdauer  $\tilde{\tau}$  des  $\text{Nb}^{93}$ -Kernes gegen Spaltung für zwei Werte des  $\nu$ -Parameters in Gl. (46), der angibt, um welchen Faktor der Kern während des Spaltungsprozesses seine Oberfläche vergrößern muß. Abszisse ist die Temperatur  $\tilde{T}$  der Spaltprodukte.

hängt das Ergebnis empfindlich von den Annahmen über die thermodynamischen Funktionen im Zwischenzustand ab (die im Exponenten stehenden Entropien haben die Größenordnung  $10^2$ ). Folgendes kann gesagt werden: Man gerät nicht in Widerspruch mit unseren Abschätzungen, wenn man annimmt, daß  $\tilde{\tau}$  und  $20\tau$  von derselben Größenordnung sind, mindestens für höhere Temperaturen; 20 ist die Größenordnung der Zahl der Verdampfungsprodukte eines Kernes (einschließlich der unsichtbaren Neutronen). Bei tieferen Temperaturen macht sich die Erleichterung der Spaltung durch die Existenz abgeschlossener Schalen deutlich bemerkbar (für Uran ist erfahrungsgemäß die „unsymmetrische“ Spaltung gegenüber der „symmetrischen“ um einen Faktor der Größenordnung  $10^3$  bevorzugt<sup>35</sup>), so daß die Hypothese ungefähr gleich großer Zeitskala für Verdampfung und Spaltung auch hier, bis herab zu Temperaturen von etwa  $2 \cdot 10^{-3}$ , nicht unberechtigt erscheint. Bei noch schwächerer Anregung wird die Spaltung sicher

biert wird, ungefähr den Wert  $1/2$ , woraus für den Betrag der während der Einschnürung insgesamt ausgetauschten Energie die Größenordnung  $10^3 \cdot 10^{-3}$  folgt.

<sup>35</sup> Plutonium Project, Rev. mod. Physics 18, 511 [1946].

seltener, unter  $1 \cdot 10^{-3}$  sogar seltener als die  $\gamma$ -Emission.

#### 4. Überlagerung der Teilprozesse

Nun soll diskutiert werden, was nach den bisherigen Ergebnissen für den experimentellen Befund zu erwarten ist. Bei den hier vorausgesetzten hohen Anregungen findet der Verdampfungsvorgang natürlich viele Male statt: ein verdampftes Teilchen entführt dem Kern im Mittel nur den Energiebetrag

$$\bar{\varepsilon} = 2T - V \quad (48)$$

[nach (20)], und auch durch eine möglicherweise eintretende Spaltung wird nach Abschnitt 3 die Temperatur der Kernmaterie nur unerheblich vermindert. Die Entstehung eines Plattensternes hat man sich also im allgemeinen Falle folgendermaßen vorzustellen. Nach dem Verlassen der (durch den Stoß des primären Teilchens gebildeten) Kaskade stellt sich in dem Kern vom Atomgewicht  $A_0$  zu einem Zeitpunkt  $t_0$  eine homogene Temperatur  $T_0$  ein. Nach einer Zeit, die im Mittel den Wert  $\tau(A_0, T_0)$  von Gl. (37) hat, verdampft das erste  $z^\alpha$ -Teilchen, entzieht dabei dem Kern eine Energie, deren Erwartungswert durch (48) gegeben ist, und eine Teilchenzahl der Größenordnung 2. Darauf folgt auf eine im Mittel etwas längere Zeit  $\tau(A, T)$  die zweite Emission usw. Die Mittelwerte  $A(t)$  und  $T(t)$  der dabei entstehenden monoton abnehmenden Zeitfunktionen lassen sich als Funktionen der Anfangswerte im Prinzip aus (20) und (36) berechnen, ebenso die zu erwartenden Anzahlen und Energieverteilungen der bis zum Zeitpunkt  $t$  emittierten verschiedenen  $z^\alpha$ -Partikel. Für den relativen Neutronenexzeß kann mit hinreichender Genauigkeit der Gl. (25) gemäß  $\theta(t) = \theta_0[A(t)]$  postuliert werden. Die genauen Rechnungen sind leider nur durch numerische Integration zu bewältigen und sehr zeitraubend. Unter Verwendung einer halbempirisch definierten mittleren Temperatur  $\tilde{T}$  an Stelle von  $T(t)$  hat Hagedorn<sup>9</sup> einen brauchbaren Näherungsausdruck für  $A(t)$  hergeleitet. Wir gehen auf diese Frage nicht näher ein. Wenn nun die am Ende des letzten Abschnittes ausgesprochene Annahme über die Spaltwahrscheinlichkeit zutrifft, gelingt es nur einem Teil der Kerne, bis zur vollständigen Abkühlung  $T(\infty) = 0$  ungestört zu verdampfen. Wir setzen voraus, daß ein beträchtlicher Teil der Kerne

zwischendurch spaltet. Der Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem das geschieht, hat, wenn die Abschätzung des vorigen Abschnittes genau genug ist, die Größenordnung  $\tilde{\tau}(A_0, T_0)$  von Gl. (47). Die beiden Teilkerne werden danach die Verdampfung unter veränderten Bedingungen fortsetzen,

$$A_1 = \tilde{A}(t_1) \equiv \frac{1}{2} A(t_1) \quad \text{und} \quad T_1 = \tilde{T}(t_1). \quad (49)$$

Sie kann wieder (zu einem mittleren Zeitpunkt  $t_2$ ) durch eine weitere Spaltung unterbrochen werden usw. Die Durchrechnung dieses ganzen komplizierten Vorganges würde sehr mühsam werden und hätte höchstens dann Sinn, wenn die Funktion  $\tilde{\tau}(A, T)$  mit einer größeren Genauigkeit bekannt wäre, zumal die Veränderung der Verdampfungswahrscheinlichkeit, die diese Spaltungen nach sich ziehen können, nur geringfügig sein wird. Was uns als Folgen der Spaltung einzig interessiert, ist die Überlagerung der Eigenbewegung der Spaltprodukte und die dadurch bedingte Verzerrung des Energiespektrums.

Um einen ungefähren Einblick in das Ausmaß dieser Verzerrung zu erhalten, wollen wir das Energiespektrum nach einer Spaltung mit denjenigen vergleichen, die man statt dessen ohne die Spaltung erhalten würde. Bewegt sich der Kern mit der kinetischen Energie  $\tilde{E}$  und emittiert er dabei gemäß Gl. (20), und zwar (statistisch) isotrop, so resultiert nach dem (nichtrelativistischen) Additionstheorem der Geschwindigkeiten<sup>36</sup> für das Laborsystem die Energieverteilung

$$w'_{\varepsilon'} = \frac{1}{2\tilde{v}} \frac{1}{T^2} \int_{|v' - \tilde{v}|}^{v' + \tilde{v}} dv \, t_+ \left( \frac{1}{2} m v^2 - V \right) \cdot \left( \frac{1}{2} m v^2 - V \right) e^{-(\frac{1}{2} m v^2 - V)/T} \quad (50)$$

mit  $\varepsilon' \equiv \frac{1}{2} m v'^2$  und  $\tilde{E} \equiv \frac{1}{2} m \tilde{v}^2$ , vgl.<sup>14</sup>.

Dies haben wir für  $A = 93$  und  $T = 5 \cdot 10^{-3}$  ausgewertet. Um die Abkühlung und das Zusammenschmelzen des Kernes wenigstens summarisch mit zu berücksichtigen, haben wir in (20) und (50) statt  $A, Z$  und  $T$  die Mittelwerte  $\bar{A} = 0,7 \cdot A$  bzw.  $\bar{A}' = 0,7 \cdot \tilde{A} = 0,7 \cdot \frac{1}{2} A$ ,  $\bar{Z} = 0,7 \cdot Z$  bzw.  $\bar{Z}' = 0,7 \cdot \tilde{Z} = 0,7 \cdot \frac{1}{2} Z$  und  $\bar{T} = 0,4 \cdot T$  bzw.  $\bar{T}' = 0,4 \cdot \tilde{T}$  eingesetzt<sup>37</sup>. Dann wird  $\tilde{v} = 0,045$  und die minimale Geschwindigkeit, mit der  $\alpha$ -Teilchen bzw. Protonen emittiert werden,  $\sqrt{2V_\alpha/m_\alpha} = 0,053$  bzw.  $\sqrt{2V_p/m_p} = 0,070$ . Im La-

<sup>36</sup> Sie sind von der Größenordnung 0,05, ihr Quadrat also  $\gg 1$ .

<sup>37</sup> Für die Faktoren 0,7 und 0,4 können wir uns auf die Hagedornsche Rechnung<sup>9</sup> berufen.

boratoriumssystem können daher minimal die Geschwindigkeiten 0,008 bzw. 0,025, d. h. die Energien  $0,15 \cdot 10^{-3}$  (statt  $11,7 \cdot 10^{-3}$ ) bzw.  $0,3 \cdot 10^{-3}$  (statt  $4,9 \cdot 10^{-3}$ ) auftreten. Es können dadurch also sehr energiearme Spuren herauskommen; bei den  $\alpha$ -Spuren ist diese Verschiebung des unteren Endes des Energiespektrums wesentlich auffälliger als bei den p-Spuren. Das wird besonders an den Abb. 9 und 10 deutlich, die das ganze nach Gl. (50) ge-

nungsmäßig gleich großen Gewichten  $[(1 - g)/g]$  hat die Größenordnung 1]. Da die Spaltwahrscheinlichkeiten nur ungenau bekannt sind, ist es nicht möglich, die theoretisch zu erwartenden Energieverteilungen wirklich auszurechnen. In einer späteren Arbeit soll umgekehrt mit Hilfe genauer berechneter Abkühlungskurven  $A(t; A_0, T_0)$  und  $T(t; A_0, T_0)$  aus den beobachteten Energiespektren die sekundliche Spaltwahrscheinlichkeit  $\tilde{\tau}^{-1}$  als Funktion der

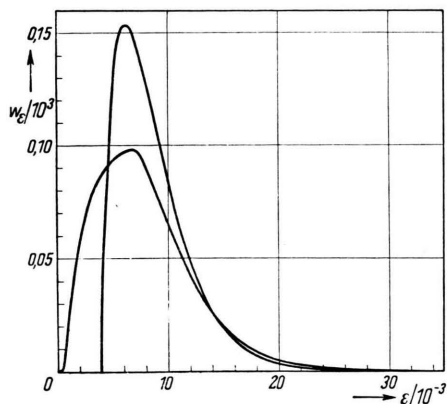


Abb. 9. Theoretisches Energiespektrum der Protonen I. ohne und II. mit vorhergehender Spaltung (auf 1 normiert), vgl. Abb. 1. (I steilere Kurve, II im Nullpunkt beginnende Kurve mit niedrigerem Maximum.)

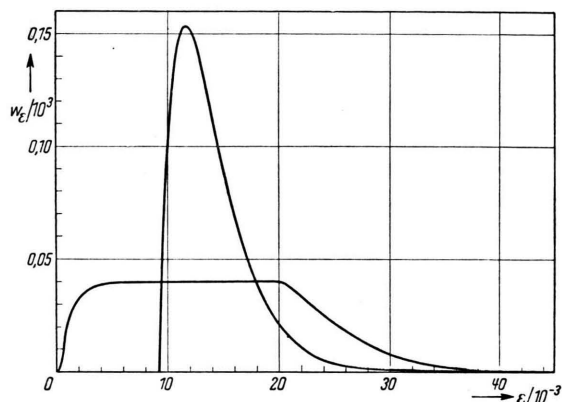


Abb. 10. Theoretisches Energiespektrum der  $\alpha$ -Teilchen I. ohne und II. mit vorhergehender Spaltung (auf 1 normiert), vgl. Abb. 2. (I steilere Kurve, II im Nullpunkt beginnende Kurve.)

rechnete p- bzw.  $\alpha$ -Spektrum wiedergeben. Wir halten es für wahrscheinlich, daß die durch die Abb. 1 und 2 aufgezeigte Diskrepanz zwischen den gemessenen und den (nach der Theorie des Richardson-Effektes) berechneten Energiespektren dadurch ihre Deutung findet<sup>38</sup>. Die experimentellen Kurven in Abb. 2 z. B. wären zu deuten als Überlagerungen der beiden in Abb. 10, und zwar mit größenord-

Anregungsenergie ermittelt werden. Es ist interessant, wie weit die so erhaltenen Voraussagen durch die (mit Beschleunigungsmaschinen auszuführenden) Spaltversuche an mittelschweren Kernen sich werden bestätigen lassen.

Den Herren Professoren C. F. v. Weizsäcker und W. Heisenberg sowie Herrn Dr. R. Hagedorn danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für fördernde Diskussionen.

<sup>38</sup> Ihrer hohen Ionisation wegen (Ladung  $\approx 20e$ ) ist die Spur, die die Ionisationsprodukte hinterlassen, sehr kurz; wie sich aus der Energie-Reichweite-Beziehung

abschätzen läßt, liegt sie an der Grenze der Beobachtbarkeit. In einem Teil der Sterne ist trotzdem mehr als eine Rückstoßspur festgestellt worden<sup>6</sup>.